Das erste Hilbert Problem, langsam zum mitschreiben

Karl-Heinz Wolff

Fassung August 2013

Einleitung:

"Gibt es eine überabzählbare Teilmenge der reellen Zahlen, die in ihrer Mächtigkeit echt kleiner ist als die reellen Zahlen?" An diesem Beispiel einer Formulierung des ersten Hilbert-Problems kann bereits dessen innerer Widerspruch gezeigt werden. Wird dabei doch vorausgesetzt, dass die Mächtigkeit der Menge der reellen Zahlen größer ist als die der natürlichen Zahlen. Dass dem nicht so ist werden wir im Folgenden zeigen. Tatsächlich enthält nämlich der Begriff "Überabzählbare Menge" bereits einen Widerspruch in sich. Diesen Widerspruch werden wir durch eine Untersuchung der Mächtigkeit der jeweils betrachteten Mengen herleiten.

Eine Wurzel der Verständnisschwierigkeiten für den Widerspruch im Begriff "Überabzählbare Menge" scheint in einer Vernachlässigung des Unterschiedes zwischen "potentiell unendlich" und "aktual unendlich" zu liegen. Darauf lassen einige Reaktionen auf die im "Kompendium zum Kontinuum" (TU Wien, Eigenverlag, 2013) enthaltenen Arbeiten schließen. Dies kann in die Irre führen. Im Folgenden sollen daher die einzelnen Schritte der einschlägigen Überlegungen noch einmal zusammengefasst werden.

1. Mitteilungen und ihre Anordnung:

11) Wir gehen in dieser Arbeit von folgender These aus: "Jeder mathematische Satz muss von einer Person P_1 einer Person P_2 mitgeteilt werden können". Dies ist der zentrale Punkt, auf dem die Untersuchungen beruhen. Die These soll nicht auf mathematische Sätze beschränkt bleiben, sondern ganz allgemein für Aussagen eines beliebigen wissenschaftlichen Gebietes gelten. Sie hat den Charakter eines Axioms. Tatsächlich wird dieses Axiom in allen Wissenschaften vorausgesetzt. Es wird aber kaum je als solches formuliert und doch liegt in ihm die Ursache für die Abweichung der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit von anderen einschlägigen Untersuchungen. Auf der Bedeutung der Mitteilungen von P_1 an P_2 beruht die Bedeutung der Sprache und dabei werden sich Anklänge an die Arbeiten von WITTGENSTEIN ergeben.

12) Die Form solcher Mitteilungen M gemäß 11) seien quadratische Raster M_n bestehend aus n^2 Elementarquadraten der Seitenlänge 0,01 mm, die entweder weiß oder schwarz sind. Wir bezeichnen n als "Umfang der Mitteilung M_n".

13) Offenbar lassen sich alle mathematischen Sätze gemäß 11) in der graphischen Form von Mitteilungen gemäß 12) darstellen. Wir ordnen nun alle solchen Mitteilungen abzählbar an und zwar folgendermaßen:

14) Einem weißen Elementarquadrat wird die Ziffer 1, einem schwarzen die Ziffer 0 zugeordnet. Es sei a_{jk} jene Ziffer (1 oder 0), die dem in der j^{ten} Zeile an k^{ter} Stelle liegenden Elementarquadrat zugeordnet ist.

15) Jede mögliche Mitteilung M_n vom Umfang n wird dann durch die Dezimalzahl

$$a(M_n) = 0{,}a_{11}a_{12}...a_{1n}a_{21}a_{22}....a_{jk}....a_{nn}$$

eindeutig gekennzeichnet.

16) Um alle möglichen Mitteilungen M abzählbar anzuordnen fasst man zunächst alle Mitteilungen M_n von gleichem Umfang n in Gruppen $G(M_n)$ zusammen und ordnet diese Gruppen nach der Größe von n an. Innerhalb jeder Gruppe $G(M_n)$ ordnet man sodann die Mitteilungen M_n nach der Größe der jeweiligen Dezimalzahl $a(M_n)$ an. Es sei AO(M) die so gewonnene abzählbare Anordnung aller möglichen Mitteilungen.

2. Wahrheit und deren Relativität:

21) Wir bezeichnen eine Mitteilung M dann und nur dann als "wahr" bezüglich einer Person P und einem Zeitpunkt T, wenn M von P in T als "wahr" bezeichnet wird. Es handelt sich also um eine "Relative Wahrheit" der Mitteilung M, nämlich nur bezogen auf P im Zeitpunkt T. Wir setzen dabei aber nicht voraus, dass M von P in T tatsächlich gelesen wird. Vielmehr bezeichnen wir M bezüglich P und T auch dann als "wahr", wenn P in T dieses Urteil fällte, falls er M tatsächlich gelesen hätte. Jedes Urteil irgend einer anderen Person als P wie z.B. das des Autors oder eines Lesers dieser Arbeit ist dabei gegenstandslos.

22) Dabei nehmen wir - offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinheit - an, dass P sein Urteil über M stets während einer gewissen "Mindestdauer" aufrecht hält und dass P als Person dabei ein gewisses "Mindestvolumen" im "Raum-Zeit-Universum RZU" (drei Raumkoordinaten, eine Zeitkoordinate) in Anspruch nimmt.

23) Der Wahrheitsbegriff gemäß 21) hat zunächst zur Folge, dass er nur für P in T gilt. Darüber hinaus gibt es aber auch kein Kriterium, ob eine von P in T als wahr bezeichnete Mitteilung M von P tatsächlich als wahr angesehen wird. P ist bei der Vergabe des Urteils "wahr" völlig frei und kann auch wider besseres Wissen so urteilen. Es soll nur sicher gestellt werden, dass keine mögliche Aussage "wahr" verloren geht.

3. Individualanordnung aller (relativ) wahren Mitteilungen:

31) Das RZU kann durch geeignete Wahl eines Koordinatensystems in vierdimensionale "Elementarwürfel EW" der Seitenlänge 0,01 mm und der Dauer von 0,01 Sek. zerlegt werden. Offenbar liegt dann mindestens einer der Elementarwürfel zur Gänze

in jedem von irgend einer Person P in irgend einem Zeitpunkt T für irgend ein Urteil in Anspruch genommenen Teil des RZU. Dieser Elementarwürfel EW = EW(P,T) kennzeichnet damit das Urteil von P in T über die Wahrheit von M eindeutig.

32) Alle Elementarwürfel EW können mit Hilfe des Koordinatensystems unschwer abzählbar angeordnet werden. Es sei AO(EW) eine solche Anordnung.

33) Alle möglichen Urteile jeder möglichen Person P in jedem möglichen Zeitpunkt T über die Wahrheit jeder möglichen Mitteilung M lassen sich jeweils durch ein Tripel (P,T,M) bezeichnen. Das Tripel (P,T,M) soll dabei bedeuten, dass die Person P, falls sie die Mitteilung M im Zeitpunkt T liest oder gelesen hätte, M als wahr bezeichnet. T ist dabei ein beliebiger Zeitpunkt aus irgend einem von P gemäß 31) für sein Urteil in Anspruch genommenen Elementarwürfel.

34) Da alle möglichen Mitteilungen M gemäß 16) in AO(M) und alle möglichen für ein Urteil in Frage kommenden Kombinationen (P,T) gemäß 31) und 32) mit Hilfe von AO(EW) abzählbar angeordnet werden können, können auch alle Kombinationen (P,T,M) abzählbar angeordnet werden. Eine solche Anordnung sei AO(P,T,M) und im Hinblick auf ihre Personenabhängigkeit bezeichnen wir sie als "Individualanordnung". In ihr wird das Urteil der Person P im Zeitpunkt T über die Wahrheit der Mitteilung M ("wahr" oder "nicht wahr") bereits berücksichtigt.

35) Ein Urteil "wahr" muss P ausdrücklich bestätigen. In allen anderen Fällen, etwa wenn P gar kein Urteil abgibt, ist sein Urteil als "nicht wahr" einzustufen.

36) Man überlegt sich übrigens unschwer, dass durch entsprechende Vergrößerungen einer Mitteilung M_n vom Umfang n auf eine Mitteilung M_{2n} vom Umfang 2n, auf eine Mitteilung M_{3n} vom Umfang 3n usw. das Urteil einer Person P über die "Wahrheit" dieser Mitteilung in den meisten Fällen gleich bleiben wird. Aus (P,T,M_n) gemäß 33) folgt daher in der Regel auch (P,T,M_{2n}), (P,T,M_{3n}) usw.

37) Die Mächtigkeit der Menge {(P,T,M)}, also der Menge aller möglichen Urteile jeder möglichen Person P in jedem möglichen Zeitpunkten T, ist wegen ihrer abzählbaren Anordenbarkeit gleich der Mächtigkeit N der Menge der natürlichen Zahlen.

4. Individualanordnung von Elementen einer Menge

41) Bisher haben wir über den Inhalt der Mitteilungen M keine Angaben gemacht und uns lediglich um das Urteil von P ("wahr" oder "nicht wahr") gekümmert. Wir wollen jetzt von einer "Menge von Elementen" ausgehen und die Mitteilungen darauf hin untersuchen, ob sie ein Element dieser Menge "eindeutig und widerspruchsfrei" beschreiben.

42) Dazu betrachten wir eine beliebig definierte Menge $M(\varepsilon)$ bestehend aus allen Elementen E_ε, welche die Eigenschaft $\mathcal{E}$ aufweisen, die sie per definitionem zu einem

Element von $M(\varepsilon)$ macht. Ein Tripel (P,T,M_ε) soll nun bedeuten, dass die Person P, falls sie die Mitteilung M_ε im Zeitpunkt T liest oder gelesen hätte, die Aussage "M_ε beschreibt ein Element der Menge $M(\varepsilon)$ eindeutig und widerspruchsfrei" als wahr bezeichnet. Analog 34) können die Tripel (P,T,M_ε) und damit die durch M_ε beschriebenen Elemente in einer "Individualanordnung" $AO(P,T,M_\varepsilon)$ abzählbar angeordnet werden. In der Regel lässt sich ein Element einer Menge durch unendlich viele Mitteilungen beschreiben, so dass jedes Element unendlich oft in $AO(P,T,M_\varepsilon)$ auftritt.

43) Als Beispiel wähle man etwa R(0,1), die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Die in 42) angesprochene Eigenschaft Ɛ ist dann die, eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 zu sein. Ein Tripel {P,T,M[R(0,1)]} bedeutet nun, dass die Person P, falls sie die Mitteilung M[R(0,1)] im Zeitpunkt T liest oder gelesen hätte, die Aussage "M[R(0,1)] beschreibt eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei" als "wahr" bezeichnet. Analog 34) können die Tripel {P,T,M[R(0,1)]} in einer Anordnung AO{P,T,M[R(0,1)]} abzählbar angeordnet werden. Diese Anordnung nennen wir analog 42) "Individualanordnung der reellen Zahlen zwischen 0 und 1".

5. Die Vollständigkeit der Individualanordnung:

51) Jede Anordnung $AO(P,T,M_\varepsilon)$ gemäß 42) ist insoweit vollständig, als jede Beschreibung eines in ihr angeblich nicht enthaltenen Elementes zu einem Widerspruch führt. Um dies zu zeigen nehmen wir an, die Person P_K sei ein Kritiker der behaupteten Vollständigkeit und dieser beschreibe in einem Zeitpunkt T_K ein Element ${}_KE_\varepsilon$ der Menge $M(\varepsilon)$, das angeblich nicht in der Anordnung $AO(P,T,M_\varepsilon)$ enthalten ist. Wir können nun die von P_K gegebene Beschreibung des Elementes ${}_KE_\varepsilon$ in die Form einer Mitteilung gemäß 12) bringen und diese bezeichnen wir mit ${}_KM_\varepsilon$. Im Zeitpunkt T_K behauptet also der Kritiker P_K, die Mitteilung ${}_KM_\varepsilon$ beschreibe ein nicht in $AO(P,T,M_\varepsilon)$ enthaltenes Element ${}_KE_\varepsilon$ aus der Menge $M(\varepsilon)$ eindeutig und widerspruchsfrei, d.h. es gelte sowohl ${}_KE_\varepsilon \in M(\varepsilon)$ als auch ${}_KE_\varepsilon \notin AO(P,T,M_\varepsilon)$.

52) Nach der Definition und den Bezeichnungen gemäß 42) besteht die Menge $M(\varepsilon)$ aber gerade aus allen jenen Elementen E_ε, welche die Eigenschaft Ɛ aufweisen. Aus ${}_KE_\varepsilon \in M(\varepsilon)$ folgt daher per definitionem ${}_KE_\varepsilon \in AO(P,T,M_\varepsilon)$ in Widerspruch zu der Behauptung des Kritikers gemäß 51). Es ist dem Kritiker also nicht gelungen, ein in der Individualanordnung $AO(P,T,M_\varepsilon)$ nicht enthaltenes Element der Menge $M(\varepsilon)$ widerspruchsfrei anzugeben.

6. Die Argumentation von CANTOR:

61) Als Beispiel haben wir in 43) die Menge R(0,1), die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1, angeführt. Eine Individualanordnung AO{P,T,M[R(0,1)]} der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 liefert gemäß 51) und 52) eine vollständige abzählbare Anordnung dieser Zahlen. Um dennoch die Überabzählbarkeit von R(0,1) zu beweisen, versucht CANTOR eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 zu finden, die nicht in

AO{P,T,M[R(0,1)]} enthalten ist. Er geht dabei von einer Darstellung der reellen Zahlen aus R(0,1) als unendliche Dezimalzahlen aus und zwar sei

$$a_n = 0,a_{n1}a_{n2}.....a_{nn}.....$$

die n^{te} reelle Zahl aus AO{P,T,M[R(0,1)]}. Diese Individualanordnung der reellen Zahlen $a_1,a_2,...a_n,.....$ zwischen 0 und 1 nimmt CANTOR als Grundlage für die folgende Zusammenstellung:

$$\begin{array}{l} a_1 = 0,a_{11}a_{12}....a_{1n}..... \\ a_2 = 0,a_{21}a_{22}....a_{2n}..... \\ ... \quad .... \\ a_n = 0,a_{n1}a_{n2}....a_{nn}..... \\ ... \quad .... \end{array}$$

Nun bildet er eine "Diagonalzahl" $d = 0,d_1d_2....d_n.....$ mit $d_n = 1$ für $a_{nn} \neq 1$und $d_n = 2$ für $a_{nn} = 1$. Für sie gilt daher $d \neq a_n$ für alle n weil sich d stets an der n^{ten} Dezimalstelle von a_n unterscheidet.

62) Zweifellos ist d eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, die in der obigen Anordnung der a_n nicht enthalten ist. Wendet man aber die Überlegungen aus 51) und 52) auf die "Elemente" a_n der Menge R(0,1) an, sieht man unschwer, dass bereits in der die Diagonalzahl d beschreibenden Mitteilung ein Widerspruch enthalten ist. Es müsste dann nämlich sowohl $d_n = a_{nn}$ als auch $d_n \neq a_{nn}$ gelten. CANTOR ist es also nicht gelungen, eine in der Individualanordnung AO{P,T,M[R(0,1)]} nicht enthaltene reelle Zahl zwischen 0 und 1 widerspruchsfrei anzugeben.

63) Der eigentliche Grund dieses Widerspruchs liegt in der für die Schlussfolgerungen gemäß CANTOR notwendigen Voraussetzung, die Menge der a_n liege irgend einmal "aktual unendlich" vor, d.h. es sei im Laufe der Beweisführung möglich, über alle zur Erzeugung einer Diagonalzahl notwendigen Elemente a_n tatsächlich zu verfügen, um die jeweils n^{te} Dezimalstelle d_n von d für alle natürlichen Zahlen n und damit d selbst zu bestimmen. Es ist aber leicht zu sehen, dass dies nie der Fall sein kann. Dies erforderte ja Urteile auch von noch nicht oder nicht mehr existierenden Personen in noch nicht erreichten oder bereits vergangenen Zeitpunkten. Die Menge der a_n erweist sich vielmehr als lediglich "potentiell unendlich". Die von CANTOR herangezogene Beweisführung beruht daher auf einem Zirkelschluss. Das erst zu beweisende "Aktual Unendliche" wird bereits bei der zur Gewinnung der Diagonalzahl d gemäß 61) notwendigen Anordnung der a_n vorausgesetzt.

7. Schlussbemerkungen:

71) Die Einführung der Elementarwürfel EW gemäß 31) und die darauf beruhende Anordnung der möglichen Urteile von P in T über eine Mitteilung M, welche zu einer Individualanordnung gemäß 34) führen, erscheinen etwas prätentiös. Sie ermöglichen jedoch die Abzählbarkeit aller möglichen Urteile aller möglichen Personen in allen möglichen Zeitpunkten über alle möglichen Mitteilungen. Der Kern der Argu-

mentation liegt dabei in der sehr plausiblen Tatsache, dass es räumlich und zeitlich nur abzählbar viele Möglichkeiten geben kann, ein in AO(P,T,M_ε) angeblich nicht enthaltenes Element zu beschreiben, eine Folge des naturwissenschaftlichen Teiles des Charakters der Mathematik. Das Urteil von P über M in T gemäß 21) entspricht dabei dem naturwissenschaftlichen Experiment.

72) Dass es nur abzählbar viele Urteile geben kann, die zu einer Individualanordnung führen, erscheint eigentlich als trivial. Eine tatsächliche vollständige Anordnung lässt sich aber daraus nicht gewinnen. Der hergeleitete Widerspruch im Begriff "Überabzählbare Menge" beruht ja nur auf Betrachtungen über die Mächtigkeiten der jeweils in Rede stehenden Mengen und trägt nichts zur Gewinnung einer tatsächlichen vollständigen Anordnung bei. Dennoch lässt sich eine solche Anordnung wenigstens theoretisch definieren. Man weist etwa jedem Element darin seinen Platz nach der Lage jenes Einheitswürfels EW gemäß 31) zu, durch den es in der Anordnung AO(EW) gemäß 32) erstmals gekennzeichnet wird. Die Realisierung einer solchen Anordnung der Elemente erforderte allerdings bereits einen Zugriff auf die "aktual unendliche" Menge aller möglichen (P,T,M_ε) und der ist nicht möglich.

73) Allgemeiner gesagt lässt sich offenbar "Alles worüber gesprochen werden kann" in die Form einer Mitteilung gemäß 12) bringen und schließlich auch gemäß 31) bis 35) abzählbar anordnen. Man könnte also einen Satz: "Die Welt ist alles, worüber gesprochen werden kann" formulieren und weiter postulieren: "Die Welt ist abzählbar". Das erinnert an WITTGENSTEIN's "Wovon man nicht sprechen kann, darüber muss man schweigen" und "Die Welt ist alles, was der Fall ist".